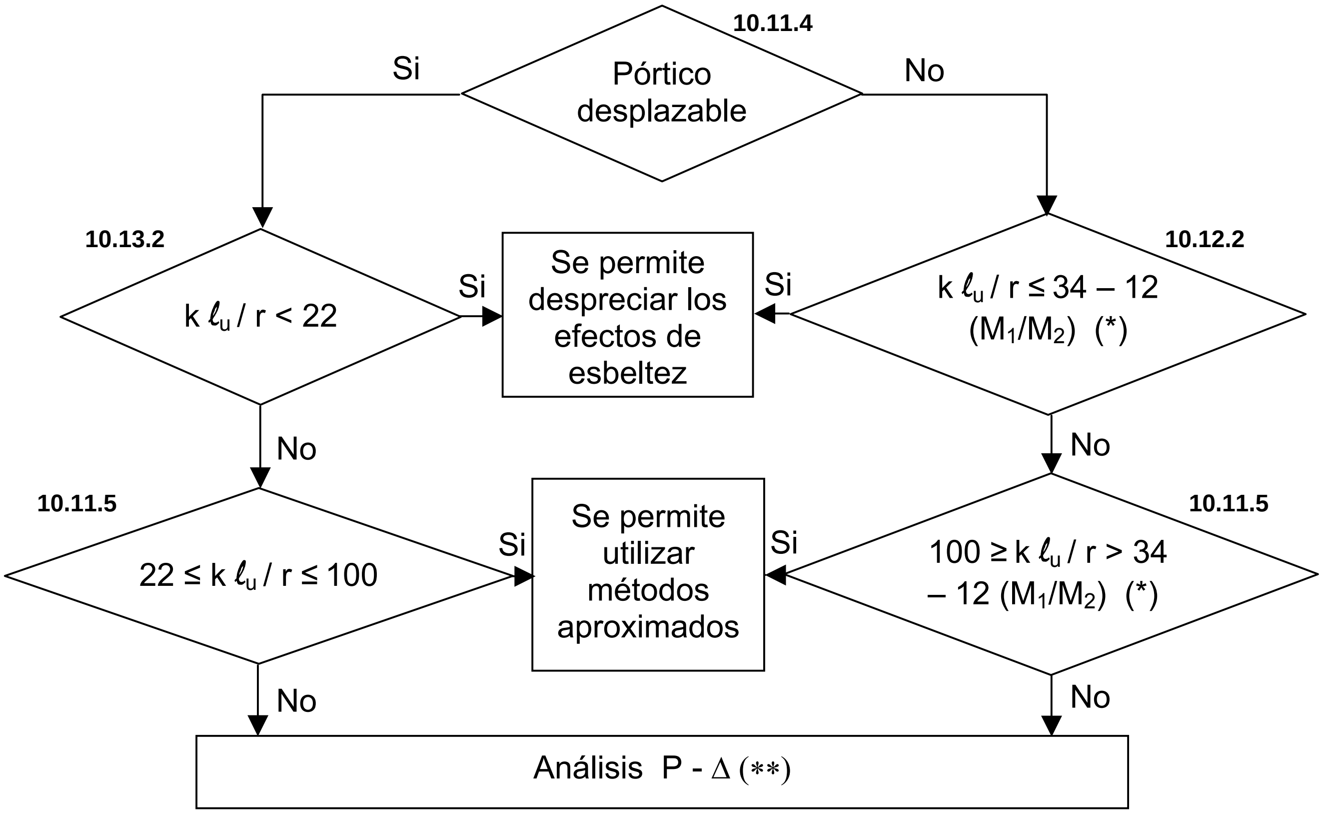
PANDEO EN ELEMENTOS PERTENECIENTES A ESTRUCTURAS CON NUDOS NO DESPLAZABLES

NOTA: Todo lo tratado en estas notas estará referido a estructuras con nodos no desplazables y no puede ser generalizado a estructuras con nodos desplazables.

6.1.- Esquema general para la consideración de los efectos de esbeltez



(*) $34 - 12\ (M_1 / M_2) \leq 40$; (**) Se permite para cualquier relación de esbeltez

En los puntos siguientes se aclara el significado de cada uno de los términos utilizados en el diagrama anterior.

6.2.- Pórticos desplazables e indesplazables

El CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.4.1, indica que se puede suponer que los nudos extremos de una columna son indesplazables cuando los momentos de primer orden en los extremos de la misma experimentan un incremento menor o igual al 5% al considerar los efectos de segundo orden. Dado que esta verificación es bastante laboriosa de efectuar, propone la siguiente expresión aproximada (artículo 10.11.4.2, Exp (10-6)) cuya verificación permite suponer que un entrepiso de una estructura es indesplazable:

$$Q = \text{índice de estabilidad} = \Sigma\ P_u\ \Delta_o\ /\ (V_{us}\ \ell_c) \leq 0{,}05$$

donde

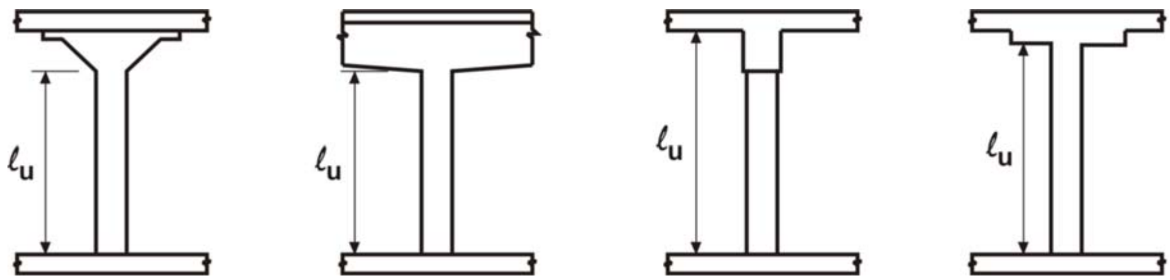
ΣP_u	=	carga vertical total mayorada
V_{us}	=	esfuerzo de corte horizontal total a nivel del piso considerado
Δ_o	=	desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a V_{us}
ℓ_c	=	longitud del elemento comprimido en estudio medida entre los ejes de los nudos del pórtico

6.3.- Longitud efectiva: $\ell_e = k\, \ell_u$

Se denomina longitud efectiva a la longitud de la onda de pandeo que se utiliza para la determinación de la carga crítica de Euler. En estructuras con nodos indesplazables esta longitud está comprendida entre 0,5 y 1,0 veces la longitud "libre" o longitud sin apoyo lateral (ℓ_u) de la pieza y en la mayoría de los casos se encuentra entre 0,75 y 0,90 veces dicha longitud dependiendo de la restricción al giro que impongan las condiciones de vínculo en los extremos superior e inferior.

6.3.1.- Longitud sin apoyo lateral (ℓ_u)

Las longitudes sin apoyo lateral de una columna pueden ser diferentes según la dirección que se esté analizando. La siguiente figura resume los criterios propuestos por el CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.3.2.



6.3.2.- Factor de longitud efectiva para elementos comprimidos (k)

El CIRSOC 201-2005, artículo C10.12.1, propone en sus Comentarios dos métodos para la determinación de este coeficiente. El primero de ellos consiste en el uso de nomogramas y el segundo en el uso de expresiones analíticas. El primer método es fácil de utilizar pero poco práctico para el cálculo de un gran número de elementos. Asimismo es imposible incorporar los nomogramas a una planilla de cálculo (si bien no se encuentran transcriptas en el CIRSOC 201-2005 podrían utilizarse las fórmulas con las que fueron desarrollados aunque en su uso pueden presentarse algunos problemas de convergencia).

El segundo método consiste en la aplicación de expresiones originalmente expuestas en la normativa británica. Estas expresiones son sencillas de utilizar y pueden ser utilizadas en planillas de cálculo y programas pero pueden arrojar resultados excesivamente del lado seguro.

Se propone aquí la utilización de una expresión extraída de la Referencia (1). Esta expresión, **válida para estructuras con nodos indesplazables**, da resultados muy próximos a los que se obtienen al aplicar los nomogramas.

La expresión propuesta es:

$$k = 1 - 1 / (5 + 9\ \Psi_A) - 1 / (5 + 9\ \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A\ \Psi_B)$$

donde los coeficientes "Ψ" para los extremos "A" (superior) y "B" (inferior) de la columna se definen como:

$$\Psi = [\Sigma\ EI / \ell_c]_{columnas}\ / [\Sigma\ EI / \ell]_{vigas}$$

En la expresión anterior "ℓ" es la longitud de cada una de las vigas que concurren al nudo tomadas entre ejes de apoyos.

En estructuras construidas con una única calidad de hormigón los módulos de elasticidad "E" se simplifican y desaparecen.

Para tener en cuenta la fisuración, el Reglamento indica que, en forma simplificada, los momentos de inercia a utilizar en las expresiones anteriores pueden tomarse como la siguiente fracción de los momentos de inercia correspondientes a las secciones brutas (I_g):

a) Columnas: $0,70\ I_{gc}$
b) Vigas: $0,35\ I_g$

Introduciendo la simplificación anterior y suponiendo un único hormigón queda:

$$\Psi = 2\ [\Sigma\ I_{gc} / \ell_c]_{columnas}\ / [\Sigma\ I_g / \ell]_{vigas}$$

En el caso de fundaciones muy rígidas "Ψ" se aproxima a cero.

6.4.- Efectos de primer orden

Según el CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.1, las fuerzas axiales mayoradas, P_u , los momentos mayorados M_1 y M_2 en los extremos de la columna, y, cuando se requiera, la deformación lateral del piso Δ_o , se deben calcular por medio de un análisis elástico de primer orden del pórtico, considerando el efecto de las cargas axiales, la presencia de zonas fisuradas a lo largo del elemento y los efectos de la duración de las cargas en las propiedades de la sección. Como alternativa, se permite utilizar las siguientes propiedades de los elementos de la estructura:

<table>
<tr><th></th><th>Módulo de elasticidad</th><th>Momento de inercia</th><th>Área</th></tr>
<tr><td>Vigas</td><td rowspan="5">Según el artículo 8.5.1 del Reglamento</td><td>$0{,}35\ I_g$</td><td rowspan="5">$1{,}0\ A_g$</td></tr>
<tr><td>Columnas</td><td>$0{,}70\ I_g$</td></tr>
<tr><td>Tabiques no fisurados</td><td>$0{,}70\ I_g$</td></tr>
<tr><td>Tabiques fisurados</td><td>$0{,}35\ I_g$</td></tr>
<tr><td>Placas y losas planas</td><td>$0{,}25\ I_g$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Cuando actúen cargas horizontales de larga duración (p.e. empujes) o cuando se efectúe las verificaciones de estabilidad, los momentos de inercia anteriores deben dividirse por el factor $(1 + \beta_d)$ donde:
β_d = máxima carga axial permanente calculada para cargas mayoradas / máxima carga axial total calculada para cargas mayoradas asociada a la combinación de cargas estudiada</td></tr>
</table>

Obtenidos los resultados del cálculo de primer orden se utilizará la siguiente nomenclatura:

M_1 = el menor momento mayorado en uno de los extremos de un elemento comprimido, que será positivo si el elemento presenta curvatura simple, y negativo si tiene doble curvatura.

M_2 = el mayor momento mayorado en uno de los extremos de un elemento comprimido, siempre positivo

Por otra parte, se fija el siguiente valor mínimo (artículo 10.12.3.2, Exp (10-14)):

$$M_{2,mín} = P_u \cdot (15 + 0{,}03 \cdot h)$$

donde

- 15 y h se expresan en milímetros
- P_u = esfuerzo axial calculado para cargas mayoradas

6.5.- Efectos de segundo orden a través de amplificación de momentos

Si se verifica que:

$$100 \geq k\,\ell_u / r > 34 - 12\ (M_1 / M_2)$$

con

- $34 - 12\ (M_1 / M_2) \leq 40$
- r = radio de giro de la sección = $(I_g / A_g)^{1/2}$
- El CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.2, permite adoptar $r = 0{,}3\ h$ en secciones rectagulares de altura “h” y $r = 0{,}25\ b_w$ en secciones circulares de diámetro “b_w”.

el CIRSOC 201-2005, artículo 10.12.3 (Exp (10-8) a (10-12)), permite la consideración simplificada de los efectos de segundo orden utilizando en el dimensionamiento el siguiente momento flector:

$$M_c = \delta_{ns} \cdot M_2$$

siendo

$$\delta_{ns} = C_m / [\ 1 - P_u / (0{,}75 \cdot P_c)]\ \geq 1$$

P_c = carga crítica de Euler = π^2 EI / (k ℓ_u)^2

$$EI = \begin{cases} (0{,}2\ E_c\ I_g + E_s\ I_{se}) / (1 + \beta_d) \\ \text{ó} \\ 0{,}4\ E_c\ I_g / (1 + \beta_d) \end{cases}$$

donde

E_c , E_s	=	módulos de elasticidad del hormigón y del acero
I_g	=	momento de inercia baricéntrico de la sección bruta de hormigón
I_{se}	=	momento de inercia de la armadura con respecto al eje baricéntrico de la sección transversal del elemento

La primera de las expresiones para el cálculo de "EI" es la más ajustada pero puede requerir de una serie de iteraciones dado que, si se está dimensionando, "I_{se}" es incógnita del problema. La segunda expresión puede utilizarse en forma directa pero puede dejar excesivamente del lado seguro para secciones con cuantías importantes.

Si sobre el elemento analizado no actúan cargas transversales se tendrá:

C_m = 0,60 + 0,40 M_1 / M_2 $\geq$ 0,40 (artículo 10.12.3.1, Exp (10-13))

Si actuaran cargas transversales entre sus apoyos (artículo 10.12.3.1) se tendrá: C_m = 1

6.6.- Amplificación de momentos en elementos sometidos a flexión compuesta oblicua

En estos casos, artículo 10.11.6, la amplificación de momentos se hace en forma independiente para cada una de las direcciones. Luego se dimensiona la sección a flexión compuesta oblicua actuando ambos momentos amplificados simultáneamente.

REFERENCIA

(1) "K-Factor Equation to Alignment Charts for Column Design" by Lian Duan, Won-Sun King, and Wai-Fah Chen. ACI Structural Journal / May-June 1993.

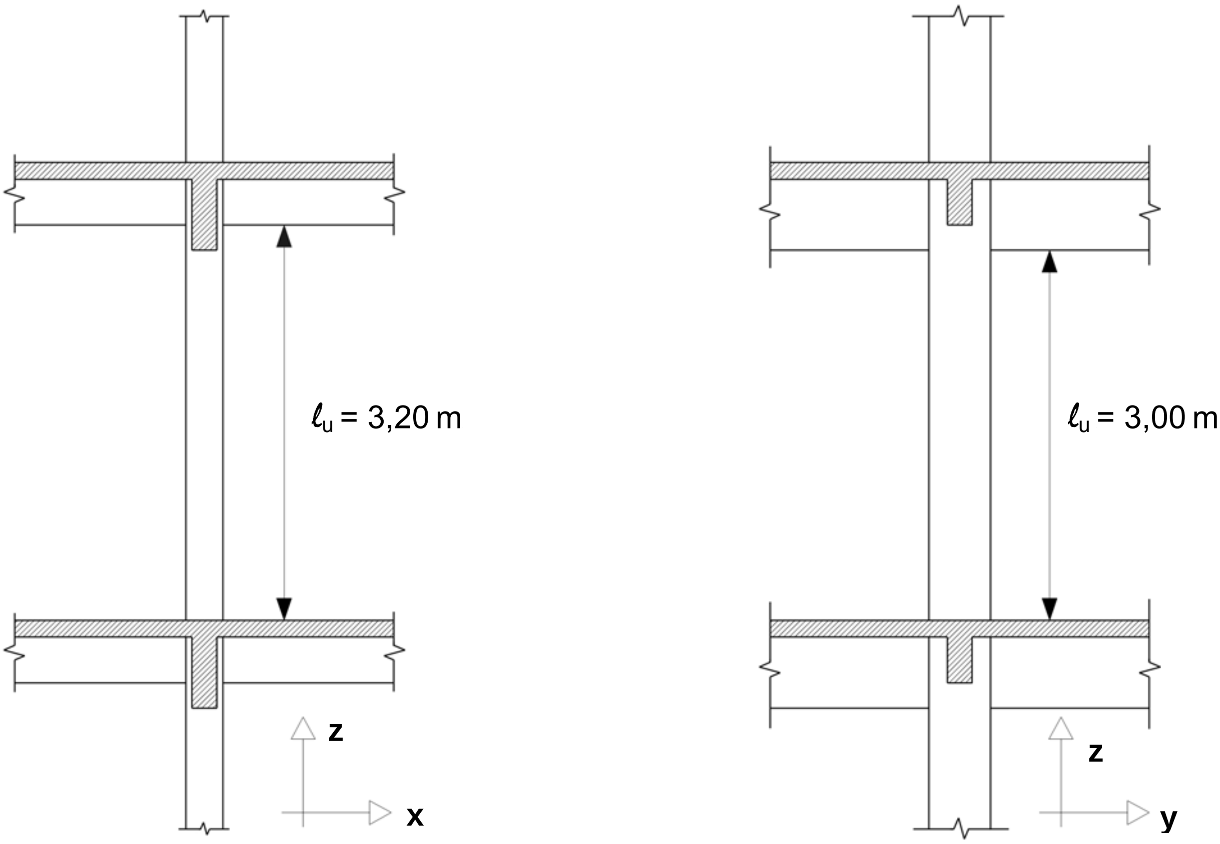
PANDEO EN ELEMENTOS PERTENECIENTES A ESTRUCTURAS CON NUDOS NO DESPLAZABLES – EJEMPLOS

NOTA: Todo lo tratado en estos ejemplos estará referido a estructuras con nodos no desplazables y no puede ser generalizado a estructuras con nodos desplazables.

Ejemplo 6.I

Enunciado: Analizar el fenómeno de pandeo en la siguiente columna

Materiales:
- Hormigón: H–20 (f'_c = 20 MPa)
- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)



Secciones y luces:
- Columnas: b_x = 0,25 m ; b_y = 0,50 m
- Vigas según eje "x": b = 0,15 m ; h = 0,50 m ; ℓ_x = 5,00m
- Vigas según eje "y": b = 0,20 m ; h = 0,70 m ; ℓ_y = 6,00m

Cargas y deformaciones:
- P_u = 1400 kN ; (70% es permanente)
- Momentos nudo superior: M_{ux} = 75 kNm ; M_{uy} = 35 kNm
- Momentos nudo inferior: M_{ux} = -39 kNm ; M_{uy} = -17,5 kNm
- ΣP_u = carga vertical total mayorada = 18000 kN

- V_{ux} = esfuerzo de corte horizontal total a nivel del piso considerado = 450 kN
- V_{uy} = esfuerzo de corte horizontal total a nivel del piso considerado = 330 kN
- Δ_{ox} = desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a V_{ux} = 0,003 m
- Δ_{oy} = desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a V_{uy} = 0,002 m

Resolución:

a) Nudos desplazables o indesplazables?

a.1) Verificación según la Dirección "x"

$\ell_c = \ell_u + 0{,}50 = 3{,}20 \text{ m} + 0{,}50 = 3{,}70 \text{ m}$

Q = índice de estabilidad = $\Sigma P_u \Delta_o / (V_{us} \ell_c)$

$Q_x = 18000 \text{ kN} \cdot 0{,}003 \text{ m} / (450 \text{ kN} \cdot 3{,}70 \text{ m}) = 0{,}032 < 0{,}05$

a.2) Verificación según la Dirección "y"

$\ell_c = \ell_u + 0{,}70 = 3{,}00 \text{ m} + 0{,}70 = 3{,}70 \text{ m}$

$Q_y = 18000 \text{ kN} \cdot 0{,}002 \text{ m} / (330 \text{ kN} \cdot 3{,}70 \text{ m}) = 0{,}029 < 0{,}05$

Por lo tanto la estructura puede considerarse de nodos indesplazables en ambas direcciones.

b) Cálculo de las longitudes efectivas y cálculo de esbelteces

b.1) Dirección "x"

$\Psi = 2 \cdot [\Sigma I_{gc} / \ell_c]_{columnas} \; / [\Sigma I_g / \ell]_{vigas}$

Columnas: $I_{gc} = 0{,}50 \text{ m} \cdot (0{,}25 \text{ m})^3 / 12 = 6{,}51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Vigas: $I_g = 0{,}15 \text{ m} \cdot (0{,}50 \text{ m})^3 / 12 = 15{,}625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 6{,}51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 3{,}70 \text{ m}] / (2 \cdot 15{,}625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 5 \text{ m})] = 1{,}126$

$k = 1 - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0{,}78$

$\ell_e = 0{,}78 \cdot 3{,}20 \text{ m} = 2{,}493 \text{ m}$

r = radio de giro = $b_x / 12^{1/2} = 0{,}25 \text{ m} / 12^{1/2} = 0{,}0722 \text{ m}$

$k \ell_u / r = \ell_e / r = 2{,}493 \text{ m} / 0{,}0722 \text{ m} = 34{,}5$

b.2) Dirección "y"

Columnas: $I_{gc} = 0,25\ m \cdot (0,50\ m)^3 / 12 = 26,042 \cdot 10^{-4}\ m^4$
Vigas: $I_g = 0,20\ m \cdot (0,70\ m)^3 / 12 = 57,167 \cdot 10^{-4}\ m^4$

$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 26,042 \cdot 10^{-4}\ m^4 / 3,70\ m] / (2 \cdot 57,167 \cdot 10^{-4}\ m^4 / 6\ m)] = 1,477$

$k = 1 – 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) – 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) – 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0,81$

$\ell_e = 0,81 \cdot 3,00\ m = 2,426\ m$

r = radio de giro = $b_y / 12^{1/2} = 0,50\ m / 12^{1/2} = 0,144\ m$

$k\ \ell_u / r = \ell_e / r = 2,426\ m / 0,144\ m = 16,8$

c) Es necesario considerar los efectos de segundo orden?
Es válido el uso de métodos aproximados (Amplificación de momentos)?

c.1) Dirección "x"

$M_1 = -17,5$ kNm
$M_2 = 35$ kNm > $M_{2,mín} = P_u \cdot (0,015\ m + 0,03 \cdot h)$
$M_{2,mín} = 1400\ kN \cdot (0,015\ m + 0,03 \cdot 0,25\ m) = 31,5$ kNm

$34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 – 12 \cdot (-17,5\ kNm) / 35\ kNm = 40$

como

$k\ \ell_u / r = 34,5 < 34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 40$

No es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección "x"

c.2) Dirección "y"

$M_1 = -39$ kNm
$M_2 = 75$ kNm > $M_{2,mín} = P_u \cdot (0,015\ m + 0,03 \cdot h)$
$M_{2,mín} = 1400\ kN \cdot (0,015\ m + 0,03 \cdot 0,50\ m) = 42$ kNm

$34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 – 12 \cdot (-39\ kNm) / 75\ kNm = 40,24 \therefore$ se adopta 40

como

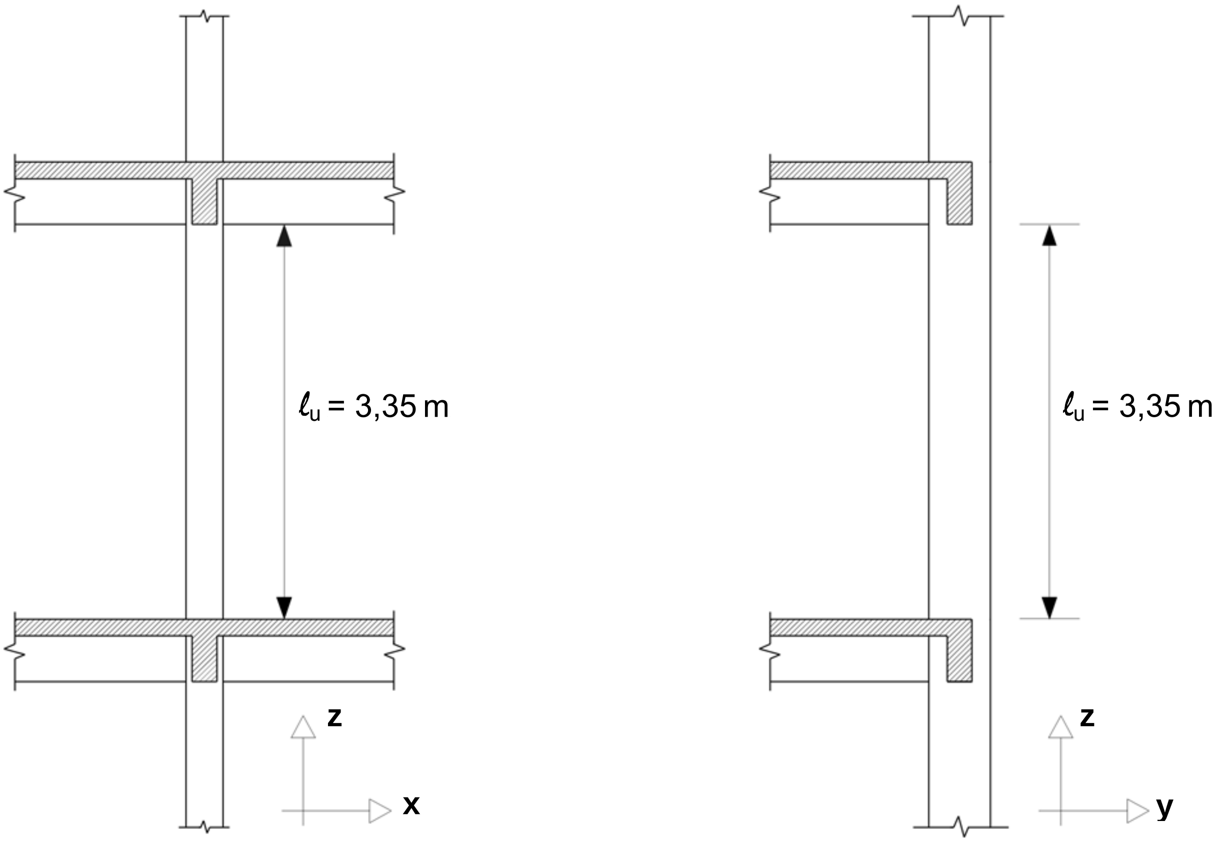
$k\ \ell_u / r = 16,8 < 34 – 12 \cdot (M_1/M_2) =$ adoptado 40

No es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección "y"

<u>**CONCLUSIÓN**</u>**: Las armaduras de la columna se calculan directamente con las solicitaciones de primer orden.**

Ejemplo 6.II

Enunciado: Calcular las armaduras de la siguiente columna. Adoptamos los materiales, las cargas y deformaciones del Ejemplo 6.I.



Secciones y luces:

- Columnas: $b_x = 0,20$ m ; $b_y = 0,40$ m ; $\ell_c = 3,7$ m
- Vigas según eje "x": b = 0,15 m ; h = 0,35 m ; $\ell_x = 4,00$m
- Vigas según eje "y": b = 0,15 m ; h = 0,35 m ; $\ell_y = 4,00$m

Resolución:

a) Nudos desplazables o indesplazables?

Vale lo visto en el Ejemplo 6.I.

b) Cálculo de las longitudes efectivas y cálculo de esbelteces

b.1) Dirección "x"

$\Psi = 2 \cdot [\Sigma I_{gc} / \ell_c]_{columnas} \; / \; [\Sigma I_g / \ell]_{vigas}$

Columnas: $I_{gc} = 0,40 \text{ m} \cdot (0,20 \text{ m})^3 / 12 = 2,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Vigas: $I_g = 0,15 \cdot (0,35 \text{ m})^3 / 12 = 5,359 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 2,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 3,70 \text{ m}] / (2 \cdot 5,359 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 4,00 \text{ m})] = 1,076$

$k = 1 – 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) – 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) – 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0{,}774$

$\ell_e = 0{,}774 \cdot (3{,}70\ m – 0{,}35\ m) = 2{,}593\ m$

r = radio de giro = $0{,}30 \cdot b_x = 0{,}30 \cdot 0{,}20\ m = 0{,}06\ m$

$k\ \ell_u / r = \ell_e / r = 2{,}593\ m / 0{,}06\ m = 43{,}22$

b.2) Dirección "y"

Columnas: $I_{gc} = 0{,}20\ m \cdot (0{,}40\ m)^3 / 12 = 10{,}667 \cdot 10^{-4}\ m^4$
Vigas: $I_g = 0{,}15\ m \cdot (0{,}35\ m)^3 / 12 = 5{,}359 \cdot 10^{-4}\ m^4$

$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 10{,}667 \cdot 10^{-4}\ m^4 / 3{,}70\ m] / (1 \cdot 5{,}359 \cdot 10^{-4}\ m^4 / 4{,}00\ m)] = 8{,}607$

$k = 1 – 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) – 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) – 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0{,}964$

$\ell_e = 0{,}964 \cdot (3{,}70\ m – 0{,}35\ m) = 3{,}229\ m$

r = radio de giro = $0{,}30 \cdot b_y = 0{,}30 \cdot 0{,}40\ m = 0{,}12\ m$

$k\ \ell_u / r = \ell_e / r = 3{,}229\ m / 0{,}12\ m = 26{,}91$

c) Es necesario considerar los efectos de segundo orden?
Es válido el uso de métodos aproximados (Amplificación de momentos)?

c.1) Dirección "x"

$M_1 = -17{,}5\ kNm$
$M_2 = 35\ kNm \ > \ M_{2,mín} = P_u \cdot (0{,}015\ m + 0{,}03 \cdot h)$
$M_{2,mín} = 1400\ kN \cdot (0{,}015\ m + 0{,}03 \cdot 0{,}20\ m) = 29{,}4\ kNm$

$34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 – 12 \cdot (-17{,}5\ kNm) / 35\ kNm = 40$

como

$k\ \ell_u / r = 43{,}22 \ > \ 34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 40$

Es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección "x"

c.2) Dirección "y"

$M_1 = -39\ kNm$
$M_2 = 75\ kNm \ > \ M_{2,mín} = P_u \cdot (0{,}015\ m + 0{,}03 \cdot h)$
$M_{2,mín} = 1400\ kN \cdot (0{,}015\ m + 0{,}03 \cdot 0{,}40\ m) = 37{,}8\ kNm$

$34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 – 12 \cdot (-39\ kNm) / 75\ kNm = 40{,}24 \ \therefore$ se adopta 40

como

$k\ \ell_u / r = 26{,}91 \ < \ 34 – 12 \cdot (M_1/M_2) = 40$

No es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “y”

<u>CONCLUSIÓN</u>: Sólo será necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “x”.

d) Cálculo de momentos amplificados

d.1) C_m

Como no existen cargas transversales:

$$C_m = 0{,}60 + 0{,}40 \cdot (-17{,}5 \text{ kNm}) / 35 \text{ kNm} = 0{,}40$$

d.2) EI

Dado que no se conoce la armadura se puede utilizar la expresión:

$EI = 0{,}40\ E_c\ I_{gc} / (1 + \beta_d) = 0{,}40 \cdot 21019000 \text{ kN/m}^2 \cdot 2{,}667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 1{,}7 =$
$EI = 1319 \text{ kNm}^2$

siendo:

$E_c = 4700 \cdot f'_c{}^{1/2} = 4700 \cdot 20^{1/2} \text{ MPa} = 21019 \text{ MPa}$
$I_{gc} = 0{,}40 \text{ m} \cdot (0{,}20 \text{ m})^3 / 12 = 2{,}667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
$\beta_d = 0{,}70 \cdot P_u / P_u = 0{,}70$

d.3) P_c (carga crítica de Euler)

$$P_c = \pi^2\ EI / (k\ \ell_u)^2 = \pi^2 \cdot 1319 \text{ kNm}^2 / (2{,}593 \text{ m})^2 = 1935 \text{ kN}$$

d.4) δ_{ns}

$$\delta_{ns} = C_m / [\ 1 - P_u / (0{,}75 \cdot P_c)] = 0{,}40 / [1 - 1400 \text{ kN} / (0{,}75 \cdot 1935 \text{ kN})] = 11{,}281 > 1$$

d.5) Momento mayorado de cálculo

$$M_c = \delta_{ns} \cdot M_2 = 11{,}281 \cdot 35 \text{ kNm} = 394{,}84 \text{ kNm}$$

e) Solicitaciones finales

La columna deberá ser dimensionada entonces para las siguientes solicitaciones:

$P_u = 1400 \text{ kN}$; $M_{ux} = 75 \text{ kNm}$; $M_{uy} = 394{,}84 \text{ kNm}$

De aquí en adelante lo que sigue es un proceso de dimensionamiento a flexión compuesta oblicua ordinario.